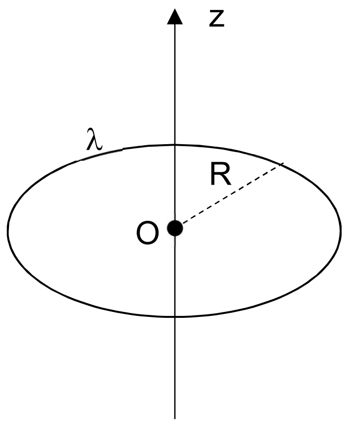
Esercizio n.1 **[10 punti]**

Su di una sottile spira circolare di raggio **R** è depositata una densità di carica costante ed uniforme λ. A) Calcolare il campo elettrico nel punto **z = R** dell'asse z che passa per il centro 0 della spira. Supponiamo ora di mettere una particella di carica **q** e massa **m** nel centro della spira, nel punto O, e di spostarla di un infinitesimo dalla posizione centrale. B) Si chiede di calcolare la velocità della particella quando si troverà all'infinito (molto lontano dalla spira).



Dati: $R = \sqrt{2}$ ***m ;*** $\lambda = 9 \cdot 10^{-8}$ ***C/m ;*** $q = 1\ \mu C$***;*** $m = 1$ ***g.***

A) Il potenziale *dV(z)* sull'asse *z* creato da un tratto *dl* della spira sarà: $dV(z) = \frac{kdq}{r} = k\frac{\lambda\, dl}{\sqrt{R^2+z^2}}$ essendo $k = 1/4\pi\varepsilon_0$ ed r la distanza fra un punto qualunque della spira e un punto sull'asse z.

Integrando su tutta la circonferenza si ha: $V(z) = \oint dV(z) = k\frac{\lambda\, 2\pi R}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{\lambda}{2\,\varepsilon_0}\frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}$.

Il campo elettrico ha solo la componente *z* diversa da zero, per simmetria,

quindi $$E_z(z) = -\frac{\partial V(z)}{\partial z} = \frac{\lambda}{2\,\varepsilon_0}\frac{z\,R}{(R^2+z^2)^{3/2}} \quad \therefore$$

che, nel punto z=R, vale: $$E_z(R) = \frac{\lambda}{2\,\varepsilon_0}\frac{R^2}{(2R^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{2\,\varepsilon_0}\frac{1}{R\,2\sqrt{2}} \cong \frac{9\cdot 10^{-8}}{9\cdot 10^{-12}\sqrt{2}\,4\sqrt{2}}\,10^4 = \frac{1}{8}\cdot 10^4 \cong 0{,}12\ 10^4\ \mathrm{V/m} \quad \therefore$$

Il calcolo può essere fatto anche integrando su tutta la circonferenza il campo elettrico generato da un elementino dl, considerando che la direzione del campo fa un angolo con l'asse z. La componente radiale integrata è nulla, rimane la componente lungo l'asse z. Il risultato è ovviamente lo stesso.

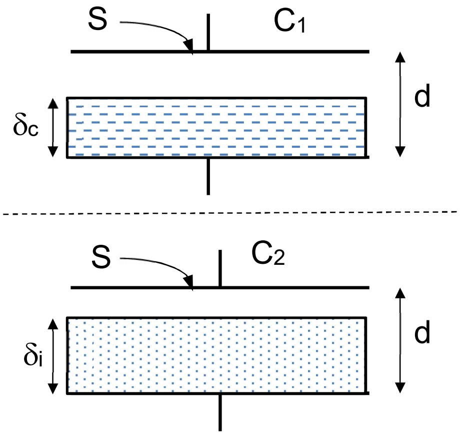
B) L'energia della particella si conserva, quindi E(totale) = E(cinetica) + E (potenziale) = costante

In particolare all'inizio l'energia cinetica è nulla ed alla fine, all'infinito, è nulla l'energia potenziale, quindi:

$E_{in} = E_p(q, V(0)) = E_{fin} = E_c(m, v)$, quindi: $q \cdot V(0) = \frac{1}{2} m\, v^2$; il potenziale in O è: $V(0) = \frac{\lambda}{2\,\varepsilon_0}$

Da cui si ha: $$v = \sqrt{\frac{2\,q\,V(0)}{m}} = \sqrt{\frac{2\,q\,\lambda}{2\varepsilon_0 m}} = \sqrt{\frac{q\,\lambda}{\varepsilon_0 m}} \cong \sqrt{\frac{10^{-6}\cdot 9\cdot 10^{-8}}{9\cdot 10^{-12}\cdot 10^{-3}}} \cong \sqrt{10} \cong 3{,}2\ \mathrm{m/s} \quad \therefore$$

Esercizio n.2 **[10 punti]**



Si considerino due condensatori ideali uguali, piani, di superficie S e distanza fra le armature d, posti nel vuoto. Nel primo condensatore (C_1), viene quindi inserita una lastra conduttrice di spessore δ_c e superficie S. Nel secondo condensatore (C_2), viene invece inserita una lastra di materiale isolante di costante dielettrica relativa ε_r , spessore δ_i e superficie S.

A) Calcolare le espressioni delle capacità C_1 e C_2 dei due condensatori.

B) Supponendo $\delta_i = 2\delta_c$ si calcoli il(i) valore(i) che deve assumere ε_r perché le due capacità C_1 e C_2 siano numericamente uguali.

A) Il condensatore C_1 con la lastra conduttrice inserita è equivalente ad un condensatore con distanza fra le armature d - δ_c, quindi:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d-\delta_c} \quad \therefore$$

Il condensatore C_2 è equivalente alla serie di due condensatori, uno nel vuoto (C_0) e uno con costante dielettrica ε_r (C_i)quindi:

$$(C_2)^{-1} = C_0^{-1} + C_{\delta_i}{}^{-1} \quad \text{da cui:} \quad C_2 = \frac{C_0 C_{\delta_i}}{C_0 + C_{\delta_i}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{\delta_i + \varepsilon_r (d-\delta_i)} \quad \therefore$$

B) Se $\delta_i = 2\delta_c$ le due capacità sono uguali se:

$$\frac{\varepsilon_0 S}{d-\delta_c} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{2\delta_c + \varepsilon_r (d-2\delta_c)} \quad \text{cioè se} \quad \varepsilon_r = 2 \quad \therefore$$

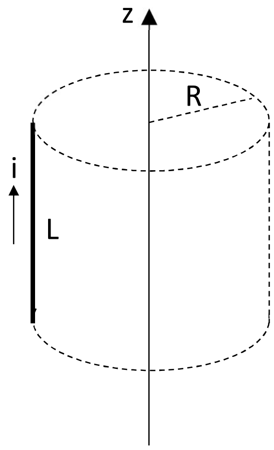
Esercizio n.3 **[10 punti]**

Si consideri una sbarretta rigida conduttrice di lunghezza **L** percorsa da una corrente costante **i**, posta ad una distanza **R** dall'asse z e parallela allo stesso asse. Nello spazio percorso dalla sbarretta è presente un campo costante di induzione magnetica $\bar{B} = B_0\,\hat{r}$ con direzione radiale.

A) Calcolare il lavoro e la potenza necessari per far compiere alla sbarretta un giro completo alla velocità angolare costante di N rotazioni al minuto intorno all'asse z, mantenendola parallela all'asse z.

Si trascuri il fatto che la sbarretta, per essere percorsa da una corrente, deve far parte di un circuito esterno opportunamente collegato alla sbarretta.

B) Si calcoli la f.e.m. indotta che appare in ogni caso ai capi della sbarretta quando ruota con la velocità angolare data immersa nel campo $\bar{B}$.



Dati: R = 2 cm ; i = 2 A ; L = 30 cm ; B₀ = π T ; N = 100

A) La sbarretta percorsa da una corrente i e immersa in un campo B sarà sottoposta ad una forza

$$\bar{F} = i\,\bar{L} \times \bar{B} = i\,L\,B_0\,\hat{\tau} \qquad \text{dove } \hat{\tau} \text{ è il versore tangente, perpendicolare a } \hat{r}$$

Perché la sbarretta ruoti con velocità costante dovrà essere $\sum \bar{F}_{esterne} = 0$, quindi dovrò applicare una Forza F_a uguale e contraria alla forza F, che farà quindi un lavoro – per fare un giro –

$$Lavoro\ (1\ giro) = \oint \bar{F_a}\ \cdot d\bar{c} = -\oint \bar{F}\ \cdot d\bar{c} = -F \cdot c = -i\,L\,B_0\,2\pi R = -2\ \cdot 0{,}3\ \cdot \pi \cdot\ 2\pi \cdot\ 2 \cdot\ 10^{-2} \cong -0{,}24\,J \quad \therefore$$

Il segno meno indica che il lavoro fatto è negativo, quindi è il sistema che compie lavoro verso l'esterno.

La potenza sarà: $P = \frac{Lavoro(1\ giro)}{T(1\ giro)} = -\frac{i\,L\,B_0\,2\pi R}{\frac{60}{N}} = -\frac{i\,L\,B_0\,2\pi R\,N}{60} \cong -0{,}4\,W \quad \therefore$ Anche la potenza è ovviamente negativa.

B) La f.e.m. indotta ai capi della sbarretta sarà:

$$f = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{dc\,L\,B_0}{dt} = -\mathrm{v}\,L\,B_0 = -\omega\,\mathrm{R}\,L\,B_0 = -\frac{2\pi}{T} R\,L\,B_0 = -\frac{2\pi}{60}\,R\,L\,B_0\,N = \frac{P}{i} \cong -0{,}2\,V \quad \therefore$$

Lo stesso risultato si ha integrando il campo di Lorentz $\bar{E} = \bar{v} \times \bar{B}$ su tutta la lunghezza della sbarretta.

Nota: Tutti i calcoli possono essere fatti con l'approssimazione del 10%, compresi i valori delle costanti fondamentali.